Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie.

Von L. RÉDEI in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Unter einer (algebraischen) Struktur verstehen wir eine Menge, in der Verknüpfungen — und zwar Addition oder Multiplikation oder beide — definiert sind.

Wir schicken folgende Bemerkung voran. Den Hauptgegenstand der Algebra bilden wohl als die gewöhnlichsten Strukturen die Gruppen, Moduln, Ringe und Schiefkörper, außerdem noch die Halbgruppen. Es gibt weitere Strukturen, die den vorigen sehr nahe stehen und ebenfalls oft vorkommen, jedoch nur selten berücksichtigt werden. Die gemeinten Strukturen werden wir (siehe § 2) Halbmoduln, Halbringe und Halbschiefkörper (oder Halb-Schiefkörper) nennen[1]).

Jetzt kommen wir auf unseren eigentlichen Gegenstand zu sprechen. Wir gehen von einer Homomorphiebeziehung

$$\mathfrak{S} \sim S \qquad (a \to a') \tag{1}$$

zwischen zwei Strukturen $\mathfrak{S}, S$ aus, wobei wir zugleich eine passende homomorphe Abbildung hingeschrieben haben. Mit (1) ist eine Einteilung von $\mathfrak{S}$ in (nichtleere) Klassen $C_1, C_2, \ldots$ verbunden, so daß man diejenigen Elemente von $\mathfrak{S}$ in einer Klasse zusammenfaßt, die ein gemeinsames homomorphes Bild haben. Bezeichnen wir mit $C(a)$ die durch das Element a representierte Klasse und definieren die Verknüpfungen

$$C(a) \cdot C(b) = C(a \cdot b), \tag{2}$$

wobei „·" alle Verknüpfungszeichen durchläuft, die in $\mathfrak{S}$ einen Sinn haben, so bilden die $C_1, C_2, \ldots$ bekanntlich eine Struktur, die wir mit $\mathfrak{S}/(C_1, C_2, \ldots)$

[1]) Schon hier erwähnen wir Beispiele, damit der Leser sieht, daß es sich um wichtige neue Strukturen handelt. Einen Halbring bilden die natürlichen Zahlen (die erste Struktur, die der Schüler kennenlernt!), allgemeinener die positiven Elemente eines angeordneten Ringes.

bezeichnen und die Faktorstruktur von $\mathfrak{S}$ nach (oder mod) $C_1, C_2, \ldots$ nennen[2]). Ferner gilt die Isomorphie:

(3) $$\mathfrak{S}/(C_1, C_2, \ldots) \approx S \ (C(a) \to a') \qquad \text{(allgemeiner Homomorphiesatz)}.$$

Selbst die Klasseneinteilung $C_1, C_2 \ldots$ nennen wir nach BOURBAKI [1][3]) kompatibel. Die kompatibilen Klassen lassen sich dadurch charakterisieren, daß für alle Verknüpfungen in $\mathfrak{S}$

(4) $$a \equiv b \implies c \cdot a \equiv c \cdot b, \ a \cdot c \equiv b \cdot c \qquad (a, b, c \in \mathfrak{S})$$

gilt, wobei $\implies$ das Zeichen für „hat zur Folge" ist. (Wenn irgendeine Klasseneinteilung vorgelegt ist, so bezeichne „$\equiv$" stets die zugehörige Äquivalenz.)

Es gibt Sturkturen, in denen sich die kompatibilen Klassen nach einer allgemeinen Vorschrift durch eine von ihnen eindeutig angeben lassen, die selbst eine Unterstruktur Σ von $\mathfrak{S}$ ist, weshalb auch Hauptklasse genannt wird. Dann läßt sich also die Faktorstruktur einfach mit $\mathfrak{S}/\Sigma$ bezeichnen, ferner nimmt dann der Homomorphiesatz die knappe Form an:

(5) $$\mathfrak{S}/\Sigma \approx S \qquad \text{(spezieller Homomorphiesatz)}.$$

Dieser Fall, wo sich nämlich die Faktorstruktur durch eine passende Unterstruktur charakterisieren läßt, liegt bekanntlich z. B. für die Gruppen und Ringe vor, wobei die möglichen Hauptklassen die normalen Untergruppen bzw. die Ideale sind. (Die Moduln als additive abelsche Gruppen sind natürlich mitzurechnen, dagegen bleiben die Schiefkörper als trivialer Fall außer acht. Später werden wir auch noch weitere Beispiele kennenlernen, die sich auf Halbgruppen (Halbmoduln) und Halbringe beziehnen.

Nunmehr sind wir beim Schreierschen Erweiterungsproblem angelangt, das sich als Umkehrproblem des speziellen Homomorphiesatzes (5) so formulieren läßt: Für gegebene Strukturen Σ, S sind alle Strukturen $\mathfrak{S}$ mit der Eigenschaft (5) zu bestimmen. Im Zusammenhang mit dem Schreierschen Problem nennt man Σ und S die Kern- bzw. Faktorstruktur, ferner jede Lösung $\mathfrak{S}$ von (5) eine Schreiersche Erweiterung von Σ mit S.

Gleich bemerken wir, daß für das Schreiersche Problem die Bedingung (5) sich durch die oft bequemeren Bedingungen

(5′) $$\mathfrak{S}/\bar{\Sigma} \approx S, \ \bar{\Sigma} \approx \Sigma$$

ersetzen läßt, denn nach (5′₂) läßt sich Σ in $\mathfrak{S}$ einbetten, wodurch man auf (5) zurückgekommen ist.

Selbst SCHREIER [6, 7] hat sein Problem nur für Gruppen gestellt und in diesem Fall auch vollständig gelöst. Die Lösung des Problems für Ringe

---

[2]) Je nachdem $\mathfrak{S}$ z. B. eine Gruppe, Halbgruppe oder ein Ring ist, ist auch die Faktorstruktur eine Gruppe, Halbgruppe bzw. ein Ring. Entsprechend nenne man die Faktorstruktur eine Faktorgruppe, Faktorhalbgruppe, einen Faktorring (= Restklassenring) usw. (Selbstverständlich kann z. B. eine Faktorhalbgruppe oder ein Faktorring eventuell sogar eine Gruppe bzw. ein Körper sein.)

[3]) Mit [ ] verweisen wir auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

$\Sigma, S, \mathfrak{S}$ stammt von EVERETT [2], weshalb wir die Schreiersche Erweiterung von Ringen auch die Everettsche Erweiterung nennen.

Die Wichtigkeit der Schreierschen Erweiterungstheorie der Gruppen und ihr Zusammenhang mit der Algebren-, Schiefkörper- und Zahlentheorie ist wohlbekannt. Insbesondere für das letztere verweise ich an die vor kurzem erschienenen Arbeiten von HASSE [3, 4]. Die entsprechende aber viel jüngere Theorie der Ringe wird gewiß eine ähnlich vornehme Stelle einnehmen. Außer den Anwendungen bei EVERETT [2] sind mir aus der bisherigen Literatur dieser Theorie nur die kleinen aber interessanten Arbeiten von SZENDREI [9] und STEINFELD [8] bekannt.

Unlängst [5] habe ich die Grundlagen der Schreierschen Theorie für Gruppen neu und begrifflich einfacher aufgebaut, zugleich auch das Isomorphieproblem der Theorie etwas allgemeiner betrachtet, ferner eine leicht übersehbare Bezeichnungsweise eingefürt. Alles werde ich hier mit verallgemeinertertem Inhalt wiederholen, wobei ich nämlich die Schreiersche Erweiterungstheorie der Halbgruppen entwickle. Die Spezialisierung für Gruppen werde ich auch ausführen, damit man sieht, wie sich dieser Fall in den allgemeineren einordnet. Desgleichen dehne ich die Everettsche Erweiterungstheorie auch auf die Halbringe aus, womit wieder auch die Ringe als Spezialfall mitbetrachtet werden. In beiden Fällen werde ich mich auch mit dem sogenannten Isomorphieproblem der Schreierschen Erweiterungen beschäftigen.

§ 2. Halbmoduln, Halbringe, Halbschiefkörper.

Wir stellen hier die zur Definition der anfangs erwähnten fünf Strukturen und der neu einzuführenden drei Strukturen dienenden Axiome tabellarisch zusammen:

(6)	Halbgruppe	$\times$	Gruppe	$\times^i$
	Halbmodul	$+$	Modul	$+^i$
	Halbring	$+\times$	Ring	$+^i\times$
	Halbschiefkörper	$+\times^i$	Schiefkörper	$+^i\times^i$

Dabei bedeutet jedes $+$ und $\times$ Zeichen, daß in der betreffenden Struktur die Addition bzw. Multiplikation definiert ist. Assoziativität und Distributivität beider Verknüpfungen, ferner Kommutativität und Regularität[4]) der Addition sind vorausgesetzt. Ein rechts angesetztes „i" bezeichnet die Invertierbarkeit[5]) der Verknüpfung, insbesondere aber für die Multiplikation in Halbschiefkörpen und

[4]) Regulär nennen wir eine Verknüpfung $a \,.\, b$, wenn jede Gleichung $a \,.\, x = b$, $y \,.\, a = b$ höchstens eine Lösung hat.

[5]) Invertierbar nennen wir eine Verknüpfung $a \,.\, b$, wenn die in [4]) genannten Gleichungen mindestens eine Lösung haben. Bekanntlich folgt hieraus die Eindeutigkeit der Lösungen d. h. die Regularität der Verknüpfung, ferner die Existenz des neutralen Elementes (das bei der Multiplikation und Addition Eins- bzw. Nullelement heißt) und die des Inversen

Schiefkörpern nur nach Ausschließung des (in Schiefkörpern stets, in Halbschiefkörpen eventuell vorhandenen) Nullelementes[6]).

Schon die augenscheinliche Vollständigkeit der Tabelle (6) spricht für das Bürgerrecht der hier neu eingeführten Strukturen. Neben den Beispielen in[1]) erwähnen wir noch die folgenden einfachen Beispiele. Sind $a_1, \ldots, a_n$ natürliche Zahlen, so bilden die Werte

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \qquad (x_i = 0, 1, \ldots; i = 1, \ldots; n)$$

einen Halbring. Die Polynome $f(x)$ mit reellen Koeffizienten und positivem Anfangskoeffizienten machen ebenfalls einen Halbring aus. Die positiven rationalen Zahlen (auch die nichtnegativen) bilden einen Halbkörper. Die Halbringe stehen im engsten Zusammenhang mit den angeordneten Ringen. Die anordnungsfähigen Ringe (insbesondere Schiefkörper) lassen sich nämlich als solche Ringe R definieren, die einen Halbring R' enthalten, so daß R', $-R'$ und 0 eben die sämtlichen verschiedenen Elemente von R ausmachen. (Diese R' sind die möglichen Positivitätsbereiche von R.) Ist S ein Modul, Ring oder Schiefkörper, so gibt es für jede Teilmenge H von S einen engsten Halbmodul-, ring bzw.-schiefkörper, der H enthält. Umgekehrt läßt sich leicht zeigen, daß man jeden Halbmodul und Halbring in einen Modul bzw. Ring einbetten kann. (Für die Halbschiefkörper gilt das entsprechende nicht.)

§ 3. Normalteiler von Halbgruppen. Ideale von Halbringen.

Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie wird so ermöglicht, daß wir neue Fälle angeben, in denen der spezielle Homomorphiesatz (5) gilt.

Erstens betrachten wir eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$, wobei wir das Vorhandensein des Einselementes annehmen und es mit e bezeichnen. Enthält $\mathfrak{H}$ ein („multiplikatives") Nullement, so bezeichnen wir es für gewöhnlich mit 0. Wird $\mathfrak{H}$ irgendwie in Klassen eingeteilt, so nennen wir stets die e enthaltende Klasse die *Hauptklasse.*

Wir zeigen, daß die Hauptklasse in einer kompatibilen Klasseneinteilung von $\mathfrak{H}$ stets eine Halbgruppe ist.

Hierzu bezeichnen wir mit N die Hauptklasse und mit r, s zwei beliebige Elemente von N. Aus $r \equiv e$ folgt nach (4) $rs \equiv s$, hieraus und aus $s \equiv e$ folgt auch $rs \equiv e$. Hiernach gilt $rs \in N$, also ist N in der Tat eine Halbgruppe.

Ist $\mathfrak{H}$ insbesondere eine Gruppe, so ist eine kompatibile Klasseneinteilung durch die Hauptklasse eindeutig bestimmt. Für Halbgruppen gilt das nicht, wie es folgendes Beispiel zeigt. Betrachten wir die durch die Elemente a, b erzeugte freie kommutative Halbgruppe mit Einselement. Die sämtlichen Elemente sind jetzt $a^i b^k$ $(i, k = 0, 1, 2, \ldots)$. Wenn jedes Element für sich eine

---

[6]) Vandiver [10] spricht über „Halbringe" in anderem Sinne als wir.

Klasse bildet, so ist das eine kompatibile Klasseneinteilung mit der Hauptklasse e. Ähnliches gilt auch über die Klasseneinteilung

$$e;\quad a, b;\quad a^2, ab, b^2;\quad a^3, a^2b, ab^2, b^3;\quad \ldots,$$

wie man das sofort sieht. Nach diesem Beispiel ist keine Rede davon, daß für Halbgruppen der spezielle Homomorphiesatz (5) gilt. Trotzdem wird dieser gültig, wenn man sich wie folgt auf passende kompatibile Klasseneinteilungen beschränkt.

Wir nennen eine kompatibile Klasseneinteilung der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit dem Einselement e und der Hauptklasse N *linksnormal,* wenn die Klassen von der Form

$$(7)\qquad a_1N,\ a_2N, \ldots \qquad (a_1 = e)$$

sind und jedes Produkt $a_iN(a_i \neq 0)$ ohne Wiederholung ist.[7])

Bezeichnet $b_i(\in a_iN)$ einen beliebigen Representanten der Klasse a_iN, so gilt $b_iN \subseteq a_iN$ $(i = 1, 2, \ldots)$, und zwar gilt „$=$" bei jeder Wahl der b_i offenbar dann und nur dann, wenn N eine Gruppe ist. Hiernach ist $a_2, a_3, \ldots$ in (7) im allgemeinen kein beliebiges Representantensystem der Klassen $\neq N$.

Wir beweisen: *Die linksnormale kompatibile Klasseneinteilung* (7) *einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Einselement ist durch die Hauptklasse N eindeutig bestimmt.*

Betrachten wir nämlich neben (7) eine weitere linksnormale kompatibile Klasseneinleitung.

$$(8)\qquad b_1N, b_2N, \ldots \qquad (b_1 = e)$$

von $\mathfrak{H}$. Jedes a_i ist in einem festen b_kN und b_k in einem festen a_lN enthalten. Aus der Kompatibilität von (8) folgt $a_iN \subset b_kN$, aus der von (7) folgt weiter $b_kN \subseteq a_lN$. Da hiernach $a_iN \subseteq a_lN$, $a_iN = a_lN$ ist, so gilt $a_iN = b_kN$, womit die Behauptung bewiesen ist.[8])

Entsprechend obiger Definition nennen wir eine Unter-Halbgruppe N einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ einen *Linksnormalteiler* (oder eine linksnormale Unter-Halbgruppe) von $\mathfrak{H}$, wenn N die Hauptklasse einer linksnormalen kompatibilen Klasseneinteilung von $\mathfrak{H}$ ist. (Eine Vorbedingung ist, daß $\mathfrak{H}$ und N das gemeinsame Einselement haben.) Ferner nennen wir dann (7) auf Grund des

---

[7]) Im allgemeinen verstehen wir unter dem Produkt AB von zwei Teilmengen A, B einer Halbgruppe die Menge aller verschiedenen ab $(a \in A, b \in B)$. Wir sagen, daß das Produkt AB ohne Wiederholung ist, wenn $ab = a'b'$ $(a, a' \in A,\ b, b' \in B)$ nur für $a = a'$, $b = b'$ gilt. Insbesondere ist das Produkt $0B (= 0)$ nicht ohne Wiederholung, wenn B aus mindestens zwei Elementen besteht.

[8]) Im Beweis wurde nicht ausgenutzt, daß in (7), (8) die Produkte $a_iN, b_iN(a_i, b_i \neq 0)$ ohne Wiederholung sind, somit würde die Behauptung ihre Gültigkeit auch für alle kompatibilen Klasseneinteilungen von der Form (7) behalten (ohne Voraussetzung der Linksnormalität). Wir haben bei (7) die Definition der linksnormalen kompatibilen Klasseneinteilungen deshalb so eng gefaßt, damit sich die darauf fußende Schreiersche Erweiterungstheorie der Halbgruppen möglichst einfach gestaltet.

bewiesenen kurz die Klasseneinteilung von $\mathfrak{H}$ nach (oder mod) N. Wir vereinbaren uns, daß wir die zugehörige Faktorhalbgruppe einfach durch $\mathfrak{H}/N$ bezeichnen.

Nach diesem Übereinkommen dürfen wir nunmehr über das Schreiersche Erweiterungsproblem von Halbgruppen sprechen. Und zwar wenn (5) gilt, wobei $\mathfrak{S}, \Sigma, S$ Halbgruppen mit Einselement sind, so nennen wir $\mathfrak{S}$ eine Schreiersche Erweiterung von Σ mit S. In diesem Sinne werden wir auch die Schreiersche Erweiterungstheorie von Halbgruppen verstehen.[9])

Man sieht, daß insbesondere für Gruppen die linksnormalen kompatibilen Klasseneinteilungen mit den kompatibilen Klasseneinteilungen und die Linksnormalteiler mit den Normalteilern zusammenfallen. Für kommutative Halbgruppen sage man „normal" statt „linksnormal".

Z. B. bilden die ganzen Elemente eines algebraischen Zahlkörpers eine Halbgruppe (mit Nullelement) und in dieser die Einheiten einen Normalteiler. In jeder Halbgruppe von Matrizen über einem Integritätsbereich bilden die Skalarmatrizen ($\neq 0$) einen Linksnormalteiler.

Wir bemerken, daß alles obige nach Übergehen auf die additive Schreibweise auch für die Halbmoduln mit Nullelement seinen Sinn behält und sich wegen der Regularität und Kommutativität einfacher gestaltet. Dementsprechend nennen wir eine kompatibile Klasseneinteilung eines Halbmoduls $\mathfrak{M}$ *normal*, wenn die Klassen von der Form

$$a_1 + N, a_2 + N, \ldots \qquad (a_1 = 0) \tag{9}$$

sind, wobei N die Hauptklasse (d. h. die Null enthaltende Klasse) bezeichnet. Diese muß ein Halbmodul sein, den wir einen *normalen Unter-Halbmodul* von $\mathfrak{M}$ nennen. Dieser läßt sich dann leicht unmittelbar definieren als ein Unter-Halbmodul N von $\mathfrak{M}$, für den eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{M}$ von der Form (9) vorhanden ist, denn diese ist offenbar auch schon kompatibel.

Zweitens betrachten wir einen Halbring $\mathfrak{R}$, von dem wir die Existenz des Nullelementes 0 annehmen. Da $\mathfrak{R}^+$ ein Halbmodul ist,[10]) so gestaltet sich jetzt alles wieder sehr einfach. Und zwar wollen wir mit einer *normalen* kompatibilen Klasseneinteilung von $\mathfrak{R}$ meinen, daß es sich um eine solche des Halbmoduls $\mathfrak{R}^+$ handelt, die dabei auch für $\mathfrak{R}^\times$ kompatibel ist. Die Hauptklasse nennen wir in diesem Falle ein *Ideal* des Halbringes $\mathfrak{R}$. Dieses läßt sich offenbar auch als ein das Nullelement enthaltender Unter-Halbmodul N

[9]) Während sich jede nichteinfache Gruppe als Schreiersche Erweiterung aus zwei Gruppen $\neq 1$ gewinnen läßt, so ist das für die Halbgruppen nicht der Fall. Betrachten wir z. B. die Halbgruppe mit den Elementen e, a, a^2 (e Einselement, $a^3 = a^2$). Diese ist nichteinfach, denn sie läßt die kompatibile Klasseneinteilung e; a, a^2 zu, läßt sich trotzdem nicht als Schreiersche Erweiterung aus zwei Halbgruppen $\neq 1$ gewinnen.

[10]) Im allgemeinen bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}^+, \mathfrak{S}^\times$ die additive bzw. multiplikative Struktur, die aus einer Struktur so entsteht, daß man in dieser nur die Addition oder Multiplikation beachtet.

von $\mathfrak{R}^+$ definieren, wofür eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{R}$ von der Form (9) existiert und unbeschränkt

$$ab, ba \in N \qquad (a \in \mathfrak{R}, b \in N)$$

gilt.

Es ist klar, daß jede normale kompatibile Klasseneinteilung des Halbringes $\mathfrak{R}$ durch die Hauptklasse (d. h. das Ideal) N eindeutig bestimmt ist. Deshalb dürfen wir den Faktorhalbring mit $\mathfrak{R}/N$ bezeichnen. Wieder gilt dann der spezielle Homomorphiesatz (5), ferner ist hierdurch der Begriff der Schreierschen Erweiterungen auch für Halbringe sinvoll geworden. (Eine Bemerkung wie [9]) gilt auch jetzt.)

Insbesondere für Ringe $\mathfrak{R}$ geht alles in das bekannte über.

§ 4. Die Schreiersche Erweiterungstheorie für Halbgruppen insbesondere Gruppen.

Gegeben seien zwei Halbgruppen S, Σ mit Einselement. Kleine lateinische und griechische Buchstaben sollen stets Elemente von S bzw. Σ, insbesondere e und ε das Einselement von S bzw. Σ bezeichnen. Enthält S ein Nullelement, so werde dies mit o bezeichnet. (Ob auch in Σ ein Nullelement vorkommt, ist gleichgültig.) Unser Zweck ist die sämtlichen Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{S}$ von Σ mit S zu bestimmen. Bequemlichkeitshalber beschränken wir uns aber im Fall $o \in S$ auf Lösungen $\mathfrak{S}$ mit Nullelement und machen erst nachträglich (in [12])) klar, wie man auch die $\mathfrak{S}$ ohne Nullelement finden kann. Umgekehrt wenn $\mathfrak{S}$ ein Nullelement enthält, dann gilt offenbar $o \in S$, somit hat die getroffene Einschränkung zur Folge, daß S und $\mathfrak{S}$ gleichzeitig ein Nullelement enthalten.

Als Vorbereitung zur Lösung des Schreierschen Problems machen wir die folgende Konstruktion. Wir betrachten die Paare

$$(a, \alpha) \qquad (a \in S, \alpha \in \Sigma).$$

Diese sollen im allgemeinen als verschieden gelten mit der einzigen Ausnahme, daß alle (o, α) als gleich anzusehen sind. (Wie hier so auch später sollen die auf o bezüglichen Aussagen außer acht gelassen werden, falls o nicht existiert.) Die Menge dieser Paare (a, α) machen wir zu einer (nicht notwendig assoziativen) Struktur, die wir mit $S \circ \Sigma$ bezeichnen und ein Schreiersches Produkt von S und Σ nennen, so daß wir eine Multiplikation der Elemente durch

$$(10) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha^b \beta) \qquad (a, b \in S; \alpha, \beta \in \Sigma)$$

definieren, wobei

$$(11) \qquad a^b, \alpha^b (\in \Sigma)$$

Funktionen der Argumente a, b bzw. α, b bezeichnen, stets unterworfen den „Anfangsbedingungen"

$$(12) \qquad a^e = \varepsilon, e^a = \varepsilon, \alpha^e = \alpha, \varepsilon^a = \varepsilon \qquad (a \neq o).$$

Da alle $(o, \alpha)(\alpha \in \Sigma)$ dasselbe Element von $S \circ \Sigma$ bezeichnen, so liest man von (10) ab, daß es auf die Werte der beiden Funktionen (11) für $ab = o$ bzw. $b = o$ gar nicht ankommt. Deshalb sehen wir im folgenden von diesen Funktionswerten völlig ab, auch wenn wir das nicht ausdrücklich sagen.

Aus (10) und (12) folgt

$$(a, \varepsilon)(b, \varepsilon) = (ab, a^b), \quad (e, \alpha)(b, \varepsilon) = (b, \alpha^b).$$

Dies und (10) zeigen, daß die Funktionen (11) und das Schreiersche Produkt $S \circ \Sigma$ einander gegenseitig eindeutig bestimmen.

Die Begriffe „Schreiersches Produkt" und „Schreiersche Erweiterung" sind voneinander wohl zu unterscheiden. Der Zusammenhang des ersten mit dem zweiten erhellt aus folgendem:

S a t z 1. *Ein Schreiersches Produkt $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ ist dann und nur dann eine Halbgruppe, wenn*

$$(\alpha\beta)^c = \alpha^c \beta^c \qquad (c \neq o), \tag{13}$$

$$\alpha^{bc} b^c = b^c (\alpha^b)^c \qquad (bc \neq o), \tag{14}$$

$$a^{bc} b^c = (ab)^c (a^b)^c \qquad (abc \neq o) \tag{15}$$

gelten. Diese Halbgruppen sind (bis auf Isomorphie) die sämtlichen Schreierschen Erweiterungen von Σ mit S, und zwar bilden dann die Elemente (e, α) einen Linksnormalteiler $\bar{\Sigma}$ von $\mathfrak{S}$, wofür

$$\mathfrak{S} / \bar{\Sigma} \approx S \quad ((a, \varepsilon)\bar{\Sigma} \to a), \qquad \bar{\Sigma} \approx \Sigma \quad ((e, \alpha) \to \alpha) \tag{16}$$

gilt.[11]) *Die Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ ist dann und nur dann eine Gruppe, wenn auch S, Σ Gruppen sind; in diesem Fall folgt aus* (12_3), (13), (14) *mit Notwendigkeit, daß alle*

$$\alpha \to \alpha^b \tag{17}$$

Automorphismen von Σ sind.[12])

B e m e r k u n g e n. Die den Bedigungen (11)—(15) genügenden Funktionen a^b, α^b nennen wir das zur Schreierschen Erweiterung gehörende *Funktionenpaar,* selbst a^b bzw. α^b das (zu $\mathfrak{S}$ gehörende) *Faktorensystem* bzw. *Endomorphismensystem.* Ist die Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ eine Gruppe, so sprechen wir kurz über eine Schreiersche Gruppenerweiterung. Nach

---

[11]) Im allgemeinen soll mit

$$A \approx A' \qquad (\alpha \to \alpha')$$

bezeichnet werden, daß $\alpha \to \alpha'$ eine isomorphe Abbildung von A auf A' ist.

[12]) Wir lassen uns erinnern, daß wir im Fall $o \in S$ nur die Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{S}$ zugelassen haben, die ebenfalls mit Nullelement sind. (Und zwar ist dann nach (10) das Nullelement von $\mathfrak{S}$ gleich (o, α).) Will man im Fall $o \in S$ die $\mathfrak{S}$ ohne Nullelement bestimmen, so braucht man nur die folgenden Änderungen durchzuführen. Man betrachtet alle (a, α) als verschieden (auch die (o, α)). Der Wert der Funktionen (11) bleibt für $ab = o$ bzw. $b = o$ nicht willkürlich. Die (13)—(15) sollen für alle a, b, c gelten.

dem Schluß des Satzes ist in der Schreierschen Theorie für Halbgruppen der Fall der Gruppenerweiterung als Spezialfall enthalten. In diesem Fall nennen wir a^b wegen (17) das *Automorphismensystem.*[13])

Korollar 1. *Gilt insbesondere*

$$a^b = \varepsilon \qquad (ab \neq o),$$

so vereinfacht sich (14) *zu*

$$(14') \qquad \alpha^{bc} = (\alpha^b)^c \qquad (bc \neq o),$$

die Bedingung (15) *ist trivial erfüllt und die Multiplikation* (10) *nimmt die Form*

$$(10') \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha^b\beta)$$

an. In diesem Fall nenne man die Schreiersche Erweiterung *faktorenfrei.*

Korollar 2. *Gilt dagegen*

$$\alpha^b = \alpha \qquad (b \neq o),$$

so bedeutet (14), *daß die* $a^b (ab \neq o)$ *im Zentrum von* Σ *liegen, die Bedingung* (15) *vereinfacht sich zu*

$$(15') \qquad a^{bc}b^c = (ab)^c a^b \qquad (abc \neq o),$$

die Bedingung (13) *ist trivial erfüllt und die Multiplikation* (10) *nimmt die Form*

$$(10'') \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b\alpha\beta)$$

an. In diesem Fall nenne man die Schreiersche Erweiterung *endomorphismenfrei* (bzw. *automorphismenfrei).*

Korollar 3. *Für eine Schreiersche Gruppenerweiterung gilt* (14′) *dann und nur dann, wenn alle* $a^b (ab \neq o)$ *im Zentrum von* Σ *liegen.*

Zum Beweis betrachten wir ein Schreiersches Produkt $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$. Damit dies eine Halbgruppe ist, ist notwendig und hinreichend, daß für (10) die Assoziativitätsbedingung erfüllt ist. Diese lautet als

$$(ab, a^b\alpha^b\beta)(c, \gamma) = (a, \alpha)(bc, b^c\beta^c\gamma).$$

Nach (10) schreibt sich hierfür

$$(abc, (ab)^c(a^b\alpha^b\beta)^c\gamma) = (abc, a^{bc}\alpha^{bc}b^c\beta^c\gamma).$$

Dieses ist gleichwertig mit

$$(18) \qquad (ab)^c(a^b\alpha^b\beta)^c = a^{bc}\alpha^{bc}b^c\beta^c \qquad (abc \neq o).$$

Setzt man hier zuerst $b = e$, dann $a = e, \beta = \varepsilon$, endlich $\alpha = \beta = \varepsilon$, so ent-

[13]) Die in der Literatur übliche Benennung „Automorphismenmenge" (s. ZASSENHAUS [11]) halten wir für verfehlt, da die Automorphismen $\alpha \to \alpha^b$ nicht verschieden zu sein brauchen. Das Faktorensystem pflegt man nach SCHREIER etwa mit $C_{a,b}$ (statt a^b) zu bezeichnen. In den Anwendungen kann diese weniger einfache Bezeichnung $C_{a,b}$ auch von Vorteil sein, es unterliegt aber keinem Zweifel, daß die von uns eingeführte Bezeichnung a^b im allgemeinen viel geeigneter ist. (Siehe die äußerliche Ähnlichkeit von (14), (15).)

stehen wegen (12) der Reihe nach (13), (14), (15). Umgekehrt wenn diese gelten, so folgt zunächst aus (15)

$$(ab)^c(a^b)^c(\alpha^b)^c\beta^c = a^{bc}b^c(\alpha^b)^c\beta^c \qquad (abc \neq o).$$

Wird links und rechts (13) bzw. (14) angewendet, so entsteht wieder (18). Wir haben die erste Behauptung des Satzes bewiesen.

Jetzt zeigen wir, daß für jede Halbgruppe $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ (16) gilt. Wegen (10), (12) gilt $(e,\alpha)(e,\beta) = (e,\alpha\beta)$. Hiernach ist $\bar{\Sigma}$ eine Unter-Halbgruppe von $\mathfrak{S}$ und auch (16_2) ist erfüllt. Wieder aus (10), (12) folgt $(a,\varepsilon)(e,\alpha) = (a,\alpha)$. Dies zeigt, daß die Produkte

$$(19) \qquad (a,\varepsilon)\bar{\Sigma} \qquad (a \in S)$$

ohne Wiederholung sind, ausgenommen den Fall $a = o$, und (10) lehrt, daß in diesem Fall der erste Faktor (o,ε) eben das Nullelement von $\mathfrak{S}$ ist. Hiernach bildet (19) eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{S}$. Da die Elemente (a,α) einer Klasse dadurch charakterisiert sind, daß in ihnen a konstant ist, so ist aus (10) ersichtlich, daß die Klasseneinteilung (19) kompatibel ist. Nach vorigem ist diese auch linksnormal, woraus die Existenz der Faktorhalbgruppe $\mathfrak{S}/\bar{\Sigma}$ folgt. In dieser ist nach allgemeiner Regel das Produkt der durch $(a,\varepsilon),(b,\varepsilon)$ representierten Klassen $(a,\varepsilon)\bar{\Sigma}$, $(b,\varepsilon)\bar{\Sigma}$ gleich der durch $(a,\varepsilon)(b,\varepsilon)$ representierten Klasse, die sich nach (10) eben zu $(ab,\varepsilon)\bar{\Sigma}$ berechnet. Das beweist (16_1). Wir haben gezeigt, daß für jede Halbgruppe $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ (16) gilt, worin auch die Behauptung enthalten ist, daß diese eine Schreiersche Erweiterung von Σ mit S ist.

Umgekehrt betrachten wir jetzt eine beliebige Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S}$ von Σ mit S. Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{S}$ isomorph einem Schreierschen Produkt $S \circ \Sigma$ ist.

Nach der Annahme dürfen wir

$$(20) \qquad S \approx \mathfrak{S}/\Sigma \qquad (a \rightarrow a'\Sigma)$$

setzen, wobei $a'(a \in S)$ ein volles Representantensystem der Klassen von $\mathfrak{S}$ nach Σ durchläuft, so daß die Produkte $a'\Sigma(a' \neq o)$ ohne Wiederholung sind. Selbstverständlich braucht der Representant a' durch a noch nicht eindeutig bestimmt zu sein, wir wählen aber die a' irgendwie (in ihren Klassen) fest, womit wir erreichen, daß

$$(21) \qquad a \rightarrow a' \qquad (a \in S)$$

eine feste eineindeutige Abbildung von S in $\mathfrak{S}$ ist. Dabei läßt sich

$$(22) \qquad e' = \varepsilon$$

setzen, woran wir uns festhalten wollen. Ferner gilt offenbar

$$(23) \qquad a = o \iff a' = 0,$$

wobei „$\iff$“ für „dann und nur dann“ steht und 0 das Nullelement von $\mathfrak{S}$ bezeichnet. (Nach der anfangs gemachten Einschränkung sind o und 0 gleichzeitig vorhanden.)

Die Produkte $a'\alpha (a \in S, \alpha \in \Sigma)$ sind die sämtlichen Elemente von Ξ, dabei treten die letzteren genau einmal auf mit der einzigen Ausnahme, daß die $o\alpha$ gleich 0 sind (vgl. (23)). Wir nennen $a'\alpha$ einen Augenblick die Normalform der Elemente von Ξ und wollen sehen, wie sich die Multiplikation der Elemente von Ξ in der Normalform ausdrückt. Wegen (20) gehört $a'b'$ in die Klasse $(ab)'\Sigma$, somit gilt

$$a'b' = (ab)'\varrho$$

mit einem im allgemeinen nur von a', b' abhängigen $\varrho(\in \Sigma)$, eine Ausnahme macht nur der Fall $(ab)' = 0$, in dem nämlich $\varrho(\in \Sigma)$ beliebig bleibt. Folglich ist ϱ nach (21) eine Funktion von a, b, die wir mit a^b bezeichnen. Hiernach gilt

(24) $$a'b' = (ab)'a^b \qquad (a, b \in S; a^b \in \Sigma)$$

wobei a^b wegen (23) im Fall $ab = o$ beliebig, sonst eindeutig bestimmt ist. Ferner beachten wir, daß nach unserer Annahme die Produkte $a'\Sigma (a \in S)$ eine kompatibile Klasseneinteilung von Ξ bilden. Deshalb fällt jedes $\alpha b'$ in $b'\Sigma$. Folglich läßt sich

$$\alpha b' = b'\sigma$$

setzen, wobei $\sigma(\in \Sigma)$ nur von α, b' d. h. wegen (21) nur von α, b abhängt. Eine Ausnahme macht nur der Fall $b' = 0$ d. h. nach (23) der Fall $b = o$, in welchem nämlich σ beliebig bleibt. Wir können also

(25) $$\alpha b' = b'\alpha^b \qquad (b \in S, \alpha \in \Sigma; \alpha^b \in \Sigma)$$

setzen mit einer Funktion α^b, die im Fall $b \neq o$ eindeutig bestimmt, im Fall $b = o$ beliebig ist. Als Folgerung aus (24), (25) bekommen wir

(26) $$a'\alpha \cdot b'\beta = a'b'\alpha^b\beta = (ab)'a^b\alpha^b\beta.$$

Das ist die von aus gewünschte Formel für die Multiplikation in Ξ.

Nunmehr lassen wir die Elemente $a'\alpha$ von Ξ und die Paare (a, α) einander entsprechen, wobei die (o, α) wieder als gleich anzusehen sind. Dann ist das eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von Ξ und $S \circ \Sigma$. Dabei geht (26) eben in (10) über, womit wir bewiesen haben, daß jede Schreiersche Erweiterung Ξ von Σ mit S einem Schreierschen Produkt $S \circ \Sigma$ isomorph ist.

Um auch den Rest des Satzes zu Beweisen, haben wir zuerst zu untersuchen, wann eine Schreiersche Erweiterung $\Xi = S \circ \Sigma$ eine Gruppe ist. Da (e, ε) nach (10), (12) das Einselement von Ξ ist, so ist hierzu notwendig, daß insbesondere die Elemente $(e, \alpha), (a, \varepsilon)$ ein Rechtsinverses haben, d. h. daß die Gleichungen

$$(e, \alpha)(x, \xi) = (e, \varepsilon), \qquad (a, \varepsilon)(y, \eta) = (e, \varepsilon)$$

lösbar sind. Diese Gleichungen sind nach (10), (12) gleichbedeutend mit

$$(x, \alpha^x\xi) = (e, \varepsilon) \qquad (ay, a^y\eta) = (e, \varepsilon).$$

Hiernach muss $x = e$ also nach (12_3) $\alpha\xi = \varepsilon$, ferner $ay = e$ gelten. Das bedeutet, daß sowohl α in Σ als auch a in S ein Rechtsinverses haben, d. h. Σ und S Gruppen sind. Umgekehrt wenn dies der Fall ist, so läßt sich zu jedem (a, α) zuerst ein b, dann ein β so bestimmen, daß die rechte Seite von (10) in (e, ε) übergeht. Das bedeutet, daß (a, α) sein Rechtsinverses hat, also $\mathfrak{S}$ eine Gruppe ist. Wir haben bewiesen, daß $\mathfrak{S}$ dann und nur dann eine Gruppe ist, wenn S, Σ Gruppen sind.

Zum Beweis der letzten Behauptung des Satzes betrachten wir den Fall, daß S, Σ Gruppen sind, und nehmen (12_3), (13), (14) an. Wir haben zu zeigen, daß die Gleichung

$$\alpha^b = \varrho \tag{27}$$

für jedes Paar $b (\in S), \varrho (\in \Sigma)$ genau eine Lösung $\alpha (\in \Sigma)$ hat. Aus (27) folgt

$$(\alpha^b)^{b^{-1}} = \varrho^{b^{-1}}, \tag{28}$$

$$b^{b^{-1}}(\alpha^b)^{b^{-1}} = b^{b^{-1}}\varrho^{b^{-1}},$$

also nach (14), (12_3)

$$\alpha b^{b^{-1}} = b^{b^{-1}}\varrho^{b^{-1}}. \tag{29}$$

Umgekehrt folgt aus (29) die Gleichung (28) und hieraus

$$((\alpha^b)^{b^{-1}})^b = (\varrho^{b^{-1}})^b,$$

$$(b^{-1})^b((\alpha^b)^{b^{-1}})^b = (b^{-1})^b(\varrho^{b^{-1}})^b,$$

also nach (14), (12_3)

$$\alpha^b(b^{-1})^b = \varrho(b^{-1})^b,$$

d. h. (27). Hiernach hat (27) die einzige Lösung

$$\alpha = b^{b^{-1}}\varrho^{b^{-1}}(b^{b^{-1}})^{-1}.$$

Satz 1 haben wir bewiesen.

Die Korollarien 1, 2 sind trivial. Zum Beweis vom Korollar 3 nehmen wir die Richtigkeit von (14′) an. Hieraus und aus (14) folgt, daß $\alpha^{b\varepsilon}, b^\varepsilon$ vertauschbar sind. Da jetzt (17) ein Automorphismus ist; so folgt, daß b^ε im Zentrum von Σ liegt. Umgekehrt wenn dies der Fall ist, so folgt aus (14) auch das Bestehen von (14′), womit wir Korollar 3 bewiesen haben.

Wir wollen uns noch mit dem Isomorphieproblem der Schreierschen Erweiterungstheorie für Halbgruppen beschäftigen. Dieses Problem besteht darin, daß man bei gegebenen Halbgruppen S, Σ die sämtlichen isomorphen Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{S}$ von Σ mit S bestimmt. Selbstverständlich darf man sich dabei auf die im Satz 1 enthaltenen Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ beschränken. (Das hat den großen Vorteil, daß dann bei festen S, Σ die sämtlichen Erweiterungen $S \circ \Sigma$ aus denselben Elementen (a, α) bestehen.) Eine vollständige Lösung des Isomorphieproblems ist kaum denkbar. Das weiteste, was wir in dieser Richtung sagen können, ist im folgenden

Satz enthalten, wovon wir später unten gewisse wichtige Spezialfälle ausführlicher betrachten werden.

Satz 2. *Man nehme eine Schreiersche Erweiterung* $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ *aus Satz 1. Mit dem zugehörigen Funktionenpaar* a^b, α^b *zusammen genügt auch jedes Funktionenpaar*

$$(ab)'^{-1}(Aa)^{A^b}(a'e'^{-1})^{A^b}b', \quad b'^{-1}(e'\alpha e'^{-1})^{A^b}b' \tag{30}$$

den Bedingungen (11)—(15) *und liefert eine zu* $\mathfrak{S}$ *isomorphe Schreiersche Erweiterung* $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$; *wobei* $a \to Aa$ *einen Automorphismus von* S *und* $a \to a'$ *eine Abbildung von* S *in* Σ *bezeichnet, wofür alle* a' *ein Inverses in* Σ *haben. Und zwar gilt*

$$\mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \quad ((a, \alpha) \to (A^{-1}a, (A^{-1}a)'^{-1}\alpha e')). \tag{31}$$

Insbesondere also wenn Σ *eine Gruppe ist, so darf* $a \to a'$ *jede Abbildung von* S *in* Σ *sein.*

Bemerkung. Bei einem festen Funktionenpaar a^b, α^b nennen wir die Funktionenpaare (31) *assoziiert im weiteren Sinne.* Der Satz bietet hauptsächlich für Gruppen Σ eine reiche Möglichkeit zur Auffindung von isomorphen Schreierschen Erweiterungen.

Zum Beweis nehmen wir vor allem in acht, daß das Funktionenpaar (31) offenbar den Bedingungen (11), (12) genügt.

Wir betrachten die Permutation

$$(a, \alpha) \to (Aa, a'\alpha e'^{-1})$$

der Elemente von $\mathfrak{S}$. Wird diese mit Π bezeichnet, so liefert nach bekanntem allgemeinen Prinzip (s. Rédei [5], § 2) der Übergang zur neuen Multiplikation

$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = \Pi^{-1}(\Pi(a, \alpha) \cdot \Pi(a, \beta))$$

eine zu $\mathfrak{S}$ isomorphe Struktur $\mathfrak{S}_1$ mit dem Isomorphismus

$$\mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \quad ((a, \alpha) \to \Pi^{-1}(a, \alpha)).$$

In unserem Fall ist Π^{-1} eben die Abbildung in (31). Ferner gilt nach (10)

$$\begin{aligned}(a, \alpha) \times (b, \beta) &= \Pi^{-1}((Aa, a'\alpha e'^{-1})(Ab, b'\beta e'^{-1})) = \\ &= \Pi^{-1}(Aa \cdot Ab, (Aa)^{A^b}(a'\alpha e'^{-1})^{A^b}b'\beta e'^{-1}) = \\ &= (ab, (ab)'^{-1}(Aa)^{A^b}(a'\alpha e'^{-1})^{A^b}b'\beta) = \\ &= (ab, (ab)'^{-1}(Aa)^{A^b}(a'e'^{-1})^{A^b}b' \cdot b'^{-1}(e'\alpha e'^{-1})^{A^b}b'\beta).\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (30) beweist (31), ferner folgt aus Satz 1 mit Notwendigkeit, daß für (30) auch (13)—(15) gelten. Satz 2 haben wir bewiesen.

Als Anwendung von Satz 2 wollen wir uns mit dem Problem der *äquivalenten* Schreierschen Erweiterungen von Halbgruppen beschäftigen. [14]) Die

[14]) Darunter verstehen wir folgendes. Betrachten wir alle Schreiershen Erweiterungen von Σ mit S, die wir bequemlichkeitshalber wieder als Schreiersche Produkte $S \circ \Sigma$ annehmen (wie im Satz 1). Zwei solche Erweiterungen nennen wir äquivalent (oder Σ-isomorph), wenn

zu äquivalenten Erweiterungen $S \circ \Sigma$ gehörenden Funktionenpaare a^b, α^b und Faktorsysteme a^b nennen wir *assoziierte Funktionenpaare* bzw. *assoziierte Faktorsysteme*. Insbesondere nennen wir wie üblich die den faktorenfreien und endomorphismenfreien Erweiterungen äquivalenten Erweiterungen *zerfallende Erweiterungen* bzw. *zentrale Erweiterungen* und die zugehörigen Funktionenpaare und Faktorsysteme ebenfalls *zerfallende* bzw. *zentrale Funktionenpaare* und *Faktorsysteme*.

Bevor wir auf die Frage der äquivalenten Erweiterungen eingehen, bemerken wir, daß wegen Korollar 2 die Benennung „zentral" begründet ist (wenn auch wegen Korollar 3 nicht ganz zutreffend). Die Begründung der Benennung „zerfallend" liegt darin, daß die faktorenfreien Erweiterungen eben diejenigen Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ sind, in denen $\mathfrak{S}$ in der Form

$$\mathfrak{S} = S\Sigma \tag{32}$$

„zerfällt"; das bedeutet, daß die Klassen von $\mathfrak{S}$ nach Σ mit den Elementen von S representierbar sind. (Selbstverständlich ist (32) so zu verstehen, daß S und Σ nur bis auf Isomorphie bestimmt sind.) Gilt nämlich (32) und $\mathfrak{S}/\Sigma \approx S$, so läßt sich

$$\alpha b = b\alpha^b \qquad (b \in S, \alpha \in \Sigma)$$

setzen mit einer für $b \neq o$ eindeutig bestimmten Funktion α^b. Hierfür gilt dann

$$\alpha\beta b = \alpha b \beta^b = b\alpha^b\beta^b,$$

also

$$(\alpha\beta)^b = \alpha^b\beta^b \qquad (b \neq o).$$

Andererseits berechnet sich das Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{S}$ zu

$$a\alpha \cdot b\beta = ab \cdot \alpha^b\beta.$$

Vergleicht man dies mit (10), so sieht man, daß es sich um eine faktorenfreie Schreiersche Erweiterung handelt. Umgekehrt sei $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ eine faktorenfreie Schreiersche Erweiterung. Dann gilt nach (10′)

$$(a, \varepsilon)(b, \varepsilon) = (ab, \varepsilon), \quad (e, \alpha)(e, \beta) = (e, \alpha\beta), \quad (a, \alpha) = (a, \varepsilon)(e, \alpha).$$

Diese zeigen, daß die Elemente (a, ε) und (e, α) je eine Untergruppe $\bar{S}$ und $\bar{\Sigma}$ von $\mathfrak{S}$ bilden, die zu S bzw. Σ isomorph ist, ferner $\mathfrak{S} = \bar{S}\bar{\Sigma}$ gilt. Hiernach liegt der Fall (32) vor, womit wir die Benennung „zerfallend" begründet haben.

Wir beweisen nunmehr den folgenden:

S a t z 3. *Ein volles System assoziierter Funktionenpaare läßt sich in der Form*

$$(ab)'^{-1} a^b a'^b b', \quad b'^{-1} \alpha^b b' \tag{33}$$

sie in solcher Isomorphie stehen, daß dabei sowohl die Elemente der Kernstruktur Σ (s. Satz 1) als auch die Klassen nach Σ sich selbst entsprechen. — Alles bezieht sich auf die im § 5 zu betrachtenden Halbringerweiterungen mit der Änderung, daß dann Satz 4 für Satz 1 eintritt.

angeben, wobei a^b, α^b *ein beliebiges Funktionenpaar aus Satz 1 ist (mit den Eigenschaften* (11)—(15)*) und* $a \to a'$ *alle Abbildungen von* S *in* Σ *bezeichnet, für die jedes* a' *sein Inverses* a'^{-1} *in* Σ *hat und* $e' = \varepsilon$ *gilt. Für die zu* a^b, α^b *bzw. zu* (33) *gehörenden Schreierschen Erweiterungen* $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$ *gilt*

$$(34)\qquad \mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \quad (a, \alpha) \to (a, a'^{-1}\alpha)).$$

Korollar 1. *Insbesondere ist*

$$(35)\qquad (ab)'^{-1}a'^b b', \quad b'^{-1}\alpha^b b'$$

ein volles System assoziierter zerfallender Funktionenpaare, wobei a' *und* α^b *dasselbe bedeuten wie im Satz 3 bzw. im Korollar 1 von Satz 1.*

Korollar 2. *Ähnlich ist*

$$(36)\qquad (ab)'^{-1}a^b a' b', \quad b'^{-1}\alpha b'$$

ein volles System assoziierter zentraler Funktionenpaare, wobei a' *und* a^b *dasselbe bedeuten wie im Satz 3 bzw. im Korollar 2 von Satz 2. Hiernach lassen sich die zentralen Schreierschen Erweiterungen auch dadurch charakterisieren, daß die zugehörigen Endomorphismensysteme aus lauter inneren Automorphismen von* Σ *bestehen.*

Bezeichne nämlich $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ eine Schreiersche Erweiterung wie im Satz 1 und $\mathfrak{S}_1$ eine zu $\mathfrak{S}$ äquivalente Erweiterung von Σ mit S. Wir dürfen annehmen, daß $\mathfrak{S}_1$ aus denselben Elementen besteht wie $\mathfrak{S}$ und bezeichnen die Multiplikation in $\mathfrak{S}_1$ mit $\times$. Dann gibt es eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}_1$ von der Form

$$(37)\qquad (a, \alpha) \to \Pi(a, \alpha) = (a, \varphi(a, \alpha)) \qquad (\varphi(a, \alpha) \in \Sigma, \varphi(e, \alpha) = \alpha).$$

Wegen der Isomorphie gilt

$$(38)\qquad \Pi((a, \alpha)(b, \beta)) = \Pi(a, \alpha) \times \Pi(b, \beta).$$

Nach (10), (12) (angewendet auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$) gilt insbesondere

$$(a, \alpha)(e, \beta) = (a, \alpha\beta), \quad (a, \alpha) \times (e, \beta) = (a, \alpha\beta).$$

Folglich gilt nach (37), (38)

$$(a, \varphi(a, \alpha)) = \Pi(a, \alpha) = \Pi((a, \varepsilon)(e, \alpha)) = \Pi(a, \varepsilon) \times$$
$$\times \Pi(e, \alpha) = (a, \varphi(a, \varepsilon)) \times (e, \alpha) = (a, \varphi(a, \varepsilon)\alpha).$$

Somit gilt

$$(39)\qquad \varphi(a, \alpha) = \varphi(a, \varepsilon)\alpha \qquad (a \neq o).$$

Da $\varphi(a, \alpha)$ bei festem $a (\neq o)$ nach (37) eine Permutation der Elemente von Σ ist, so folgt aus (39), daß $\varphi(a, \varepsilon)$ für $a \neq o$ ein Inverses in Σ hat und wegen (37) insbesondere $\varphi(e, \varepsilon) = \varepsilon$ ist. Folglich gilt

$$(40)\qquad (a, \alpha) \to \Pi(a, \alpha) = (a, a'^{-1}\alpha) \qquad (a' \in \Sigma, e' = \varepsilon),$$

wobei $a \to a'$ eine Abbildung von S in Σ ist, wofür alle a' ein Inverses in Σ haben. (Insbesondere bleibt o' ganz ausser acht.) Da (40) der Spezialfall

$$A = 1, \quad e' = \varepsilon$$

der Abbildung in (31) ist, ferner (30) für diesen Fall eben in (33) übergeht, so folgt aus Satz 2, daß die zu (11) assoziierten Funktionenpaare notwendig von der Form (33) sind.

Gehen wir umgekehrt von einer Schreierschen Erweiterung $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ aus und nehmen eine Permutation (40). Wird in $\mathfrak{S}$ die durch (38) definierte Multiplikation „$\times$" eingeführt, so entsteht eine zu $\mathfrak{S}$ isomorphe Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S}_1$, und zwar ist (40) ein geeigneter Isomorphismus. Da ferner (40) eine der Permutationen (37) ist, so sind $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$ äquivalente Erweiterungen. Das bedeutet, daß alle Funktionenpaare (33) assoziiert sind. Satz 3 haben wir bewiesen.

Die Korollarien 1, 2 von Satz 3 sind wegen Satz 3 und der Korollarien 1, 2 von Satz 1 auch richtig.

§ 5. Die Schreiersche Erweiterungstheorie für Halbringe, insbesondere Ringe.

In diesem Paragraphen bedeuten S, Σ zwei gegebene Halbringe mit Nullelement. Die Elemente werden wieder mit kleinen lateinischen bzw. griechischen Buchstaben bezeichnet, insbesondere die Nullelemente mit o bzw. 0. Wir wollen alle Schreierschen Erweiterungen von Σ mit S bestimmen. Vieles werden wir kurz faßen können wegen der Ähnlichkeit mit § 4.

Wir definieren das Schreiersche Produkt $S \circ \Sigma$ durch

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, [a, b] + \alpha + \beta), \tag{41}$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \{a, b\} + \alpha b + a\beta + \alpha\beta), \tag{42}$$

wobei die vier Funktionen

$$[a, b], \{a, b\}, \alpha b, a\beta (\in \Sigma) \tag{43}$$

den „Anfangsbedingungen"

$$[o, a] = [a, o] = \{a, o\} = \{o, a\} = 0a = a0 = o\alpha = \alpha o = 0 \tag{44}$$

unterworfen sind. Insbesondere können wir die zwei letzten Funktionen in (43) als „Operatorprodukte" auffaßen. In diesem Sinne ist also S gleichzeitig als Rechts- und Linksoperatorbereich von Σ, diese Operationen werden aber von den sonst üblichen stark abweichen.

Aus (41), (42), (44) folgt

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, [a, b]), \qquad (a, 0)(b, 0) = (ab, \{a, b\}),$$
$$(o, \alpha)(b, 0) = (o, \alpha b), \qquad (a, 0)(o, \beta) = (o, a\beta).$$

Hiernach und nach (41), (42) bestimmen das Schreiersche Produkt $S \circ \Sigma$ und die Funktionen (43) einander gegenseitig.

Satz 4. *Ein Schreiersches Produkt $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ der Halbringe S, Σ ist dann und nur dann ein Halbring, wenn*

$$(45)\qquad a(\beta+\gamma)=a\beta+a\gamma,\qquad (\alpha+\beta)c=\alpha c+\beta c,$$
$$(46)\qquad (a+b)\gamma+[a,b]\gamma=a\gamma+b\gamma,\quad \alpha(b+c)+\alpha[b,c]=\alpha b+\alpha c,$$
$$(47)\qquad a\beta\gamma=(a\beta)\gamma,\qquad \alpha\beta c=\alpha(\beta c),$$
$$(48)\qquad ab\gamma+\{a,b\}\gamma=a(b\gamma),\qquad \alpha bc+\alpha\{b,c\}=(\alpha b)c,$$
$$(49)\qquad (a\beta)c=a(\beta c),$$
$$(50)\qquad (\alpha b)\gamma=\alpha(b\gamma),$$
$$(51)\qquad \{ab,c\}+\{a,b\}c=\{a,bc\}+a\{b,c\},$$
$$(52)\qquad [a,b]=[b,a],$$
$$(53)\qquad [a,b]+[a+b,c]=[a,b+c]+[b,c],$$
$$(54)\qquad [a,b]c+\{a+b,c\}=[ac,bc]+\{a,c\}+\{b,c\},$$
$$a[b,c]+\{a,b+c\}=[ab,ac]+\{a,b\}+\{a,c\}$$

gelten. Diese Halbringe sind (bis auf Isomorphie) die sämtlichen Schreierschen Erweiterungen von Σ mit S, und zwar bilden dann die Elemente (o,α) ein Ideal $\bar{\Sigma}$ von $\mathfrak{S}$, wofür

$$(55)\qquad \mathfrak{S}/\bar{\Sigma}\approx S\quad ((a,0)+\bar{\Sigma}\to a),\qquad \bar{\Sigma}\approx\Sigma\quad ((o,\alpha)\to\alpha)$$

gilt. Die Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$ ist dann und nur dann ein Ring, wenn auch S,Σ Ringe sind.

B e m e r k u n g e n. Die den Bedingungen (43)—(54) genügenden Funktionen $[a,b]$, $\{a,b\}$, αb, $a\beta$ nennen wir den zur Schreierschen Erweiterung $\mathfrak{S}$ gehörenden *Funktionenvierer,* selbst $[a,b]$, $\{a,b\}$ das (zu $\mathfrak{S}$ gehörende) additive- bzw. multiplikative *Faktorensystem,* ferner $\alpha b, a\beta$ das rechtsseitige- bzw. linksseitige *Endomorphismensystem.*

K o r o l l a r. *Gilt insbesondere*

$$[a,b]=0,\quad \{a,b\}=0,$$

so vereinfacht sich (45)—(54) *zu*

$$(56)\qquad a(\beta+\gamma)=a\beta+a\gamma,\qquad (\alpha+\beta)c=\alpha c+\beta c,$$
$$(57)\qquad (a+b)\gamma=a\gamma+b\gamma,\qquad \alpha(b+c)=\alpha b+\alpha c,$$
$$(58)\qquad a\beta\gamma=(a\beta)\gamma,\qquad \alpha\beta c=\alpha(\beta c),$$
$$(59)\qquad (a\beta)c=a(\beta c),$$
$$(60)\qquad (\alpha b)\gamma=\alpha(b\gamma).$$

In diesem Fall nenne man die Schreiersche Erweiterung *faktorenfrei*[15]).

Zum Beweis betrachten wir ein Schreiersches Produkt $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$. Damit dies ein Halbring ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Addition (41) assoziativ, kommutativ und regulär, die Multiplikation (42) assoziativ ist, ferner für beide Verknüpfungen die links- und rechtseitige Distributivität

[15]) Obiges Korollar ist das Analogon zum Korollar 1 von Satz 1. Analoga zu den Korollarien 2, 3 von Satz 1 lassen sich offenbar nicht aufstellen.

gilt. Die ersten zwei Bedingungen drücken sich durch (53), (52) aus, die dritte ist offenbar von selbst erfüllt, da die Addition in S und Σ regulär sind. Die Bedingung der linksseitigen Distributivität lautet nach (41), (42)

$$(a, \alpha)(b+c, [b, c]+\beta+\gamma) = (ab, \{a, b\}+\alpha b+a\beta+\alpha\beta)+ \\ +(ac, \{a, c\}+\alpha c+a\gamma+\alpha\gamma)$$

d. h. wieder nach (41), (42)

$$\{a, b+c\}+\alpha(b+c)+a([b, c]+\beta+\gamma)+\alpha[b, c] = \\ = [ab, ac]+\{a, b\}+\{a, c\}+\alpha b+\alpha c+a\beta+a\gamma). \tag{61}$$

Ähnlich lautet die Bedingung der rechtsseitigen Distributivität

$$(a+b, [a, b]+\alpha+\beta)(c, \gamma) = \\ = (ac, \{a, c\}+\alpha c+a\gamma+\alpha\gamma)+(bc, \{b, c\}+\beta c+b\gamma+\beta\gamma)$$

d. h.

$$\{a+b, c\}+(a+b)\gamma+([a, b]+\alpha+\beta)c+[a, b]\gamma = \\ = [ac, bc]+\{a, c\}+\{b, c\}+a\gamma+b\gamma+\alpha c+\beta c. \tag{62}$$

Die Assoziativitätsbedingung der Multiplikation lautet nach (42)

$$(ab, \{a, b\}+\alpha b+a\beta+\alpha\beta)(c, \gamma) = (a, \alpha)(bc, \{b, c\}+\beta c+b\gamma+\beta\gamma)$$

d. h. wieder nach (42)

$$\{ab, c\}+ab\gamma+(\{a, b\}+\alpha b+a\beta+\alpha\beta)c+\{a, b\}\gamma+(\alpha b)\gamma+(a\beta)\gamma = \\ = \{a, bc\}+a(\{b, c\}+\beta c+b\gamma+\beta\gamma)+\alpha bc+\alpha\{b, c\}+\alpha(\beta c)+\alpha(b\gamma). \tag{63}$$

Somit genügt es zu zeigen, daß (unter Berüchsichtigung der Anfangsbedingungen (44)!) die Bedingungen (61)—(63) mit den Bedingungen (45)—(51) (54) äquivalent sind.

Setzt man in (61), (62) $b=c=o$ bzw. $a=b=o$ ein, so entsteht (wegen (44)) eben (45). Wegen dieses lassen sich dann (61), (62) so schreiben:

$$\{a, b+c\}+\alpha(b+c)+a[b, c]+\alpha[b, c] = [ab, ac]+\{a, b\}+\{a, c\}+\alpha b+\alpha c,$$
$$\{a+b, c\}+(a+b)\gamma+[a, b]c+[a, b]\gamma = [ac, bc]+\{a, c\}+\{b, c\}+a\gamma+b\gamma.$$

Wird hier $a=o$ bzw. $c=o$ eingesetzt, so gewinnen wir (wegen (44)) eben (46). Wegen dieses und der Regularität der Addition gehen die letzten zwei Gleichungen in (54) über. Wir haben bekommen, daß (60), (61) mit (45), (46), (54) äquivalent sind.

Es genügt also zu zeigen, daß unter Berücksichtigung von (44), (45) die Bedingung (63) mit den Bedingungen (47)—(51) äquivalent ist. Wird in (63) $\alpha=\beta=\gamma=0$ eingesetzt, so entsteht (wegen (44)) eben (51). Wird ferner (45) in (63) berücksichtigt und dann (51) subtrahiert, so entsteht

$$ab\gamma+(\alpha b)c+(a\beta)c+\alpha\beta c+\{a, b\}\gamma+(\alpha b)\gamma+(a\beta)\gamma = \\ = a(\beta\gamma)+a(b\gamma)+a\beta\gamma+\alpha bc+\alpha\{b, c\}+\alpha(\beta c)+\alpha(b\gamma). \tag{64}$$

Es genügt also zu zeigen, daß (unter Berücksichtigung von (44)) die Bedingung (64) den Bedingungen (47)—(50) äquivalent ist. Wird in (64) $c=o, \alpha=\beta=0$ bzw. $a=o, \beta=\gamma=0$ eingesetzt, so entsteht (wegen (44)) eben (48). Werden diese Gleichungen (48) aus (64) subtrahiert, so entsteht

(65) $$(a\beta)c+\alpha\beta c+(\alpha b)\gamma+(a\beta)\gamma=a(\beta c)+a\beta\gamma+\alpha(\beta c)+\alpha(b\gamma).$$

Wir bemerken, daß beide Seiten je ein Glied enthalten, das von a, c frei ist, bzw. von diesen Buchstaben nur a, bzw. nur c bzw. beide enthält. Wenn wir also erstens $a=c=o$, zweitens $a=o$ drittens $c=o$ einsetzen, so entstehen (wegen (44) und der Regularität der Addition) der Reihe nach (50), (47_1), (47_2), (49). Da umgekehrt aus diesen vier Gleichungen (65) folgt, so haben wir bewiesen, daß $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$ dann und nur dann ein Halbring ist, wenn (45)—(54) stattfinden.

Wir zeigen jetzt, daß für jeden Halbring $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$ (55) gilt. Wegen (41), (42), (44) gilt

$$(o,\alpha)+(o,\beta)=(o,\alpha+\beta),\qquad (o,\alpha)(o,\beta)=(o,\alpha\beta).$$

Hiernach ist $\bar{\Sigma}$ ein Unter-Halbring von $\mathfrak{S}$ und auch (55_2) ist erfüllt. Ähnlich folgt $(a,0)+(o,\alpha)=(a,\alpha)$. Dies zeigt, daß die

$$(a,0)+\bar{\Sigma}\qquad (a\in S)$$

eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{S}$ bilden. Diese ist wegen (41), (42) offenbar auch kompatibel, ferner sieht man auch die Richtigkeit von (55_1). Somit haben wir gezeigt, daß für jeden Halbring $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$ (55) gilt, worin auch die Behauptung enthalten ist, daß dieser eine Schreiersche Erweiterung von Σ mit S ist.

Umgekehrt betrachten wir jetzt eine beliebige Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S}$ von Σ mit S. Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{S}$ isomorph einem Schreierschen Produkt $S\circ\Sigma$ ist.

Nach der Annahme darf

(66) $$S\approx\mathfrak{S}/\Sigma\qquad (a\to a'+\Sigma)$$

gesetzt werden, wobei $a'(a\in S)$ ein volles Representantensystem der Klassen von $\mathfrak{S}$ nach Σ durchlauft. Wir denken die a' irgendwie festgewählt, und dann ist

(67) $$a\to a'\qquad (a\in S)$$

eine feste eineindeutige Abbildung von S in $\mathfrak{S}$. Dabei läßt sich

$$o'=0$$

annehmen.

Die Summen $a'+\alpha(a\in S, \alpha\in\Sigma)$ sind die sämtlichen verschiedenen Elemente von $\mathfrak{S}$. Wir wollen zusehen, wie die Addition und Multiplikation der Elemente von $\mathfrak{S}$ in dieser „Normalform“ sich ausdrücken. Wegen (66) gelten offenbar

$$a'+b'=(a+b)'+\varrho,\qquad a'b'=(ab)'+\sigma$$

mit irgendwelchen, nur von a', b' abhängigen Elementen $\varrho, \sigma(\in\Sigma)$. Wegen (67) läßt sich also

(68) $$a'+b'=(a+b)'+[a,b],\quad a'b'=(ab)'+\{a,b\}\quad (a,b\in S; [a,b], \{a,b\}\in\Sigma)$$

setzen, wobei $[a, b]$, $\{a, b\}$ Funktionen von a, b sind. Wegen (68) gilt

$$(a' + \alpha) + (b' + \beta) = (a + b)' + [a, b] + \alpha + \beta, \tag{69}$$

$$(a' + \alpha)(b' + \beta) = (ab)' + \{a, b\} + \alpha b' + a'\beta + \alpha\beta. \tag{70}$$

Da die Produkte $\alpha b'$, $a'\beta$ nur von α, b bzw. a, β abhängen, so darf wegen (67)

$$\alpha b' = \alpha b, \quad a'\beta = a\beta \qquad (a, b \in S;\ \alpha, \beta \in \Sigma) \tag{71}$$

gesetzt werden, wobei αb und $a\beta$ Operatorprodukte (d. h. Funktionen von α, b bzw. a, β) sind. Wird (71) in (70) eingesetzt, so sieht man hieraus und aus (69) nach Vergleich mit (41), (42), daß $\mathfrak{S}$ einem Schreierschen Produkt $S \circ \Sigma$ isomorph ist.

Endlich liest man von (41) ab, daß die Schreiersche Erweiterung (die nach obigem gewiß ein Halbring ist) dann und nur dann ein Ring ist, wenn in S und Σ die Addition invertierbar ist, d. h. S und Σ Ringe sind. Satz 4 haben wir bewiesen, das Korollar ist trivial.

Das Analogon von Satz 2 lautet so:

Satz 5. *Man nehme eine Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ aus Satz 4. Mit dem zugehörigen Funktionenvierer* (43) *zusammen genügt auch jeder Funktionenvierer*

$$\begin{gathered}[Aa, Ab] + a' + b' - (a + b)', \{Aa, Ab\} + a'(Ab) + (Aa)b' + a'b' - (ab)', \\ \alpha(Ab) + \alpha b', (Aa)\beta + a'\beta\end{gathered} \tag{72}$$

den Bedingungen (43)—(54) *und liefert eine zu $\mathfrak{S}$ isomorphe Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S}_1 = S \circ \Sigma$, wobei $a \to Aa$ einen Automorphismus von S und $a \to a'$ eine Abbildung von S in Σ bezeichnet, wofür alle a' ein Inverses in Σ^+ haben. Und zwar gilt*

$$\mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \qquad ((a, \alpha) \to (A^{-1}a, -(A^{-1})' + \alpha)). \tag{73}$$

Insbesondere also wenn Σ ein Ring ist, so darf $a \to a'$ jede Abbildung von S in Σ sein.

Bemerkung. Bei einem festen Funktionenvierer (43) nennen wir die Funktionenvierer (72) *assoziiert im weiteren Sinne.*

Zum Beweis nehmen wir vor allem in acht, daß der Funktionenvierer (72) offenbar den Bedingungen (43), (44) genügt.

Wir betrachten die Permutation

$$(a, \alpha) \to (Aa, a' + \alpha)$$

der Elemente von $\mathfrak{S}$. Wird diese mit Π bezeichnet, so liefert der Übergang zu den neuen Verknupfungen

$$(a, \alpha) \dotplus (b, \beta) = \Pi^{-1}(\Pi(a, \alpha) + \Pi(b, \beta)),$$
$$(a, \alpha) \odot (b, \beta) = \Pi^{-1}(\Pi(a, \alpha) \cdot \Pi(b, \beta))$$

eine zu $\mathfrak{S}$ isomorphe Struktur $\mathfrak{S}_1$ mit dem Isomorphismus

$$\mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \qquad ((a, \alpha) \to \Pi^{-1}(a, \alpha)).$$

Dies fällt eben mit (73) zusammen. Ferner berechnen sich die rechten Seiten der vorigen Gleichungen bzw. zu

$$\Pi^{-1}((Aa, a'+\alpha)+(Ab, b'+\beta)) = \Pi^{-1}(Aa+Ab, [Aa, Ab]+a'+b'+\alpha+\beta) =$$
$$= (a+b, -(a+b)'+[Aa, Ab]+a'+b'+\alpha+\beta),$$
$$\Pi^{-1}((Aa, a'+\alpha)(Ab, b'+\beta)) =$$
$$= \Pi^{-1}(Aa\cdot Ab, \{Aa, Ab\}+a'(Ab)+\alpha(Ab)+(Aa)b'+(Aa)\beta+$$
$$+a'b'+\alpha b'+a'\beta+\alpha\beta) =$$
$$= (ab, -(ab)'+\{Aa, Ab\}+a'(Ab)+(Aa)b'+a'b'+\alpha(Ab)+$$
$$+\alpha b'+(Aa)\beta+a'\beta+\alpha\beta).$$

Der Vergleich mit (41), (42) beweist (72), ferner folgt aus Satz 4 mit Notwendigkeit, daß auch (45)—(54) gelten. Satz 5 haben wir bewiesen.

Endlich wollen wir noch die Frage der äquivalenten Schreierschen Erweiterungen von Halbringen betrachten.[14] Die zu äquivalenten Schreierschen Erweiterungen $S \circ \Sigma$ gehörenden Funktionenvierer (43) nennen wir wieder *assoziiert*. Entsprechend sind die assoziierten Faktorensysteme zu verstehen. Insbesondere nenne man die den faktorenfreien Erweiterungen äquivalenten Erweiterungen und die zugehörenden Funktionenvierer *zerfallende Erweiterungen* bzw. *zerfallende Funktionenvierer.*[16]

Wie Satz 3 aus Satz 2 durch Spezialisierung entstanden ist, in voller Analogie gewinnen wir aus Satz 5 den folgenden Satz 6, genauer brauchen wir das nicht auszuführen.

S a t z 6. *Ein vollständiges System assoziierter Funktionenvierer läßt sich in der Form*

(74) $[a, b]+a'+b'-(ab)', \{a, b\}+a'b+ab'+a'b'-(ab)', \alpha b+\alpha b', a\beta+a'\beta$

angeben, wobei $[a, b], \{a, b\}, \alpha b, a\beta$ *ein Funktionenvierer* (43) *aus Satz 4 ist (nämlich mit den Eingenschaften* (44)—(54)*) und* $a \to a'$ *alle Abbildungen von* S *in* Σ *bezeichnet, für die jedes* a' *sein Inverse* $s-a'$ *in* Σ^+ *hat und* $o'=0$ *gilt. Für die zu* (43) *bzw.* (74) *gehörenden Schreierschen Erweiterungen* $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$ *gilt*

$$\mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \qquad ((a, \alpha) \to (a, -a'+\alpha)).$$

K o r o l l a r. *Insbesondere ist*

$$a'+b'-(a+b)', a'b+ab'+a'b'-(ab)', \quad \alpha b+\alpha b', \quad a\beta+a'\beta$$

ein volles System assoziierter zerfallender Funktionenvierer, wobei a' *und* $\alpha b, a\beta$ *dasselbe bedeuten wie im Satz 6 bzw. im Korollar von Satz 4.*

---

[16]) Natürlich lassen sich die zerfallenden Halbringerweiterungen ähnlich charakterisieren, wie das für Halbgruppenerweiterungen (im § 4) geschehen ist mit dem Unterschied, daß dann $\mathfrak{S} = S + \Sigma$ statt (32) zu nehmen ist.

Literaturverzeichnis.

[1] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique,* première partie, Livre II: *Algèbre,* Chap. I (Paris, 1942), S. 1—165.

[2] C. I. Everett, An extension theory for rings, *American Journal of Math.,* **64** (1942), S. 363—370.

[3; 4] H. Hasse, Die Multiplikationsgruppe der abelschen Körper mit fester Galoisgruppe, *Abhandlungen d. Mat. Sem. Univ. Hamburg,* **16** (1949), S. 29—40; Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe, *Journal f. d. reine u. angew. Math.,* **187** (1949), S. 14—43.

[5] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal f. d. reine u. angew. Math.,* **188** (1950), S. 201—227.

[6; 7] O. Schreier, Über die Erweiterung von Gruppen. I, *Monatshefte f. Math. u. Phys.,* **34** (1926), S. 165—180; II, *Abhandlungen d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg,* **4** (1926), S. 321—346.

[8] O. Steinfeld, Über die Nullteilerfreiheit von Ringen, *Publicationes Math. Debrecen,* **2** (1952), S. 281—285.

[9] J. Szendrei, On Schreier extension of rings without zero-divisors, *Publicationes Math. Debrecen,* **2** (1952), S. 276—280.

[10] H. S. Vandiver, On some simple types of semi-rings, *American Math. Monthly,* **46** (1939), S. 22—26.

[11] H. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig und Berlin, 1937).

(Eingegangen am 14. November 1952.)